Convolution de suites réelles

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.

Pour $u \in E$, on note $u(n)$ au lieu de u_n le terme d'indice n de la suite u.

Pour $u, v \in E$, on appelle somme des suites u et v, la suite $u+v \in E$ définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}, (u+v)(n) = u(n) + v(n)$.

On sait que la loi de composition interne $+$ sur E ainsi définie munit E d'une structure de groupe commutatif d'élément nul égal à la suite nulle notée 0.

Pour $u, v \in E$, on appelle convolé de la suite u par la suite v, la suite $u \star v \in E$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u \star v)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k) v(n-k).$$

La loi de composition interne $\star$ sur E ainsi définie est appelée produit de convolution de suites réelles.

1.a Montrer que $\star$ est commutative et associative.

1.b On note ε la suite réelle définie par $\varepsilon(0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon(n) = 0$.
Etablir que ε est élément neutre pour $\star$.

1.c Montrer que $\star$ est distributive sur $+$.

1.d Que dire de la structure $(E, +, \star)$?

2.a Soit $\rho \in \mathbb{R}$ et u la suite réelle définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = \rho^n$.
Montrer que l'élément u est inversible et déterminer son inverse.

2.b On note $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que F est un sous-anneau de l'anneau $(E, +, \star)$.

2.c Soit $f : E \to E$ définie par : $\forall u \in E$, la suite $f(u) \in E$ est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, \big[f(u)\big](n) = (-1)^n u(n)$.
Montrer que f est un automorphisme involutif de l'anneau $(E, +, \star)$.

3. On se propose maintenant de déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(E, +, \star)$.

3.a Soit u un élément inversible de l'anneau $(E, +, \star)$. Montrer que $u(0) \neq 0$.

3.b Inversement soit $u \in E$, tel que $u(0) \neq 0$. Montrer que u est inversible.

4. On se propose maintenant de justifier l'intégrité de l'anneau $(E, +, \star)$.
Soit $u, v \in E$ tels que $u \neq 0$ et $v \neq 0$.
On pose $p = \min\{n \in \mathbb{N} / u(n) \neq 0\}$ et $q = \min\{n \in \mathbb{N} / v(n) \neq 0\}$.

4.a Justifier l'existence de p et q.

4.b Montrer que $(u \star v)(p+q) \neq 0$.

4.c Conclure.